

I - مقارنة عددين حقيقيين :

: قاعدة ①

a و b عددان حقيقيان .
 إذا كان $a \leq b$ فإن $a - b \leq 0$
 إذا كان $a \geq b$ فإن $a - b \geq 0$

: أمثلة (2)

(1) -- لنقارن العددين : $\sqrt{3} - 5$ و $2\sqrt{3} - 4$

: لدينا

$$\begin{aligned} (2\sqrt{3} - 4) - (\sqrt{3} - 5) &= 2\sqrt{3} - 4 - \sqrt{3} + 5 \\ &= 2\sqrt{3} - \sqrt{3} + 5 - 4 \\ &= \sqrt{3} + 1 \end{aligned}$$

و بما أن : $\sqrt{3} + 1 \geq 0$ فإن :

$2\sqrt{3} - 4 \geq \sqrt{3} - 5$ و منه فإن :

(2) -- لنقارن العددين : x و y بحيث : $x = y - 3$

: لدينا $x - y = -3$

و بما أن : $-3 \leq 0$ فإن :

$x \leq y$ و منه فإن :

II - الترتيب و العمليات :

: الترتيب و الجمع

: خاصية ①

a و b و c أعداد حقيقية .
 إذا كان $a \leq b$ فإن $a + c \leq b + c$

* مثال :

. $x < 3$: عدداً حقيقياً بحيث
لقارن العددين 2 - و

$x < 3$ لدينا :

يعني أن :

$$x + (-5) < 3 + (-5)$$

$$x - 5 < 3 - 5$$

و بالتالي فإن :

(ب) -- خاصية ② :

أعداد حقيقية . و a و b و c و d

$$\left. \begin{array}{l} a+c \leq b+d \\ \text{فإن } \\ c \leq d \end{array} \right\} \begin{array}{l} a \leq b \\ \text{إذا كان و} \end{array}$$

* مثال :

. x و y عددان حقيقيان بحيث : $x < 3$ و $y > 2$ و
لنبين أن : $x + y < 5$

$$\left. \begin{array}{l} x < 3 \\ y < 2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{يعني أن} \\ \text{لدينا} \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} x < 3 \\ 2 > y \end{array} \right\} :$$

$x + y < 2 + 3$: إذن

و بالتالي فإن :

الترتيب و الضرب : (2)

(أ) -- خاصية ① :

$$\left. \begin{array}{l} a \times c \leq b \times c \quad \text{إذا كان } a \leq b \text{ و } c > 0 \\ a \times c \geq b \times c \quad \text{إذا كان } a \leq b \text{ و } c < 0 \\ a \leq b \quad \text{إذا كان } c > 0 \text{ و } a \times c \leq b \times c \\ a \leq b \quad \text{إذا كان } c < 0 \text{ و } a \times c \geq b \times c \end{array} \right.$$

* مثال :

$$11 \times 5 \leq 27 \times 5 \quad \text{لدينا : } 11 \leq 27 \quad \text{يعني أن}$$
$$11 \times (-4) \geq 27 \times (-4) \quad \text{يعني أن } 11 \leq 27$$

ب) -- خاصية ② :

a و b و c و d أعداد حقيقية .

$$a \times c \leq b \times d \quad \text{فإن} \quad \left. \begin{array}{l} a \leq b \\ c \leq d \end{array} \right\} \quad \text{إذا كان و}$$

* مثال :

- . $y < 2\sqrt{6}$ عددان حقيقيان موجبان بحيث : $x < \sqrt{3}$ و $xy < 6\sqrt{3}$: لنبيان أن :

لدينا :

$$x \times y < \sqrt{3} \times 2\sqrt{6} \quad \text{يعني أن} \quad \left. \begin{array}{l} x < \sqrt{3} \\ y < 2\sqrt{6} \end{array} \right\}$$

$$xy < 2\sqrt{3 \times 6}$$

$$xy < 2\sqrt{18}$$

$$xy < 2\sqrt{9 \times 2}$$

$$xy < 2\sqrt{3^2 \times 2}$$

$$xy < 2 \times 3\sqrt{2}$$

$$xy < 6\sqrt{2} \quad \text{وبالتالي فإن} :$$

(3) -- الترتيب و المقلوب :

أ) -- خاصية :

a و b عدادن حقيقيان موجبان قطعا .

$$\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b} \quad \text{إذا كان} \quad a \leq b$$

$$a \leq b \quad \text{إذا كان} \quad \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$$

ب) -- مثال :

$$\frac{1}{7} \geq \frac{1}{13} \quad \text{يعني أن} \quad 7 \leq 13 \quad \text{لدينا} :$$

$$\frac{1}{11} \leq \frac{1}{5} \quad \text{يعني أن} \quad 11 \geq 5$$

(4) - الترتيب و المربع :

أ) -- خاصية ① :

$$\left\{ \begin{array}{l} a \text{ و } b \text{ عددين حقيقيان موجبان .} \\ \text{إذا كان } a \leq b \text{ فإن } a^2 \leq b^2 \\ \text{إذا كان } a \leq b \text{ فإن } a^2 \leq b^2 \end{array} \right.$$

* مثال :

$$25 \leq 121 \quad \text{أي} \quad 5^2 \leq 11^2 \quad \text{يعني أن} \quad 5 \leq 11$$

ب) -- خاصية ② :

$$\left\{ \begin{array}{l} a \text{ و } b \text{ عددين حقيقيان سالبان .} \\ \text{إذا كان } a \leq b \text{ فإن } a^2 \geq b^2 \\ \text{إذا كان } a \leq b \text{ فإن } a^2 \geq b^2 \end{array} \right.$$

* مثال :

$$49 \geq 16 \quad \text{أي} \quad (-7)^2 \geq (-4)^2 \quad \text{يعني أن} \quad -7 \leq -2$$

(5) - الترتيب و الجذر المربع :

أ) -- خاصية :

$$\left\{ \begin{array}{l} a \text{ و } b \text{ عددين حقيقيان موجبان .} \\ \text{إذا كان } \sqrt{a} \leq \sqrt{b} \text{ فإن } a \leq b \\ \text{إذا كان } a \leq b \text{ فإن } \sqrt{a} \leq \sqrt{b} \end{array} \right.$$

* أمثلة :

$$(1) - \text{لقارن العددين : } \sqrt{10} \text{ و } \sqrt{3}$$

: لدينا

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{10} \leq 3\sqrt{3} \quad \text{و منه فإن } \sqrt{10}^2 \leq (3\sqrt{3})^2 \\ \text{إذن } \sqrt{10}^2 = 10 \\ (3\sqrt{3})^2 = 27 \end{array} \right\}$$

$$(2) - \text{لقارن العددين : } -\sqrt{6} \text{ و } -\sqrt{2}$$

: لدينا

$$\left. \begin{array}{l} -\sqrt{6} \geq -3\sqrt{2} \quad \text{و منه فإن } \sqrt{6} \leq 3\sqrt{2} \quad \text{إذن } \sqrt{6}^2 \leq (3\sqrt{2})^2 \\ \text{إذن } \sqrt{6}^2 = 6 \\ (3\sqrt{2})^2 = 18 \end{array} \right\}$$

(1) - تأثير مجموع عددين :

أعداد حقيقية بحيث :

$$\begin{aligned} z \leq b \leq t & \quad x \leq a \leq y \\ x + z \leq a + b \leq y + t \end{aligned}$$

* مثال :

- $4 \leq y \leq 2$ و x عددان حقيقيان بحيث : $3 \leq x \leq 8$ و $x + y$ لنؤطر .

لدينا :

$$3 + (-4) \leq x + y \leq 8 + 2$$

- $1 \leq x + y \leq 10$ إذن :

(2) - تأثير مقابل عدد حقيقي :

$x \leq a \leq y$ عدد حقيقي بحيث :
 $-y \leq -a \leq -x$ سيكون لدينا :

(3) - تأثير فرق عددين :

أعداد حقيقية بحيث :
 $\begin{aligned} z \leq b \leq t & \quad x \leq a \leq y \\ x - t \leq a - b \leq y - z \end{aligned}$

* ملاحظة هامة : لتأثير $a - b = a + (-b)$ ، نضع :

* مثال :

- $4 \leq y \leq 2$ و x عددان حقيقيان بحيث : $3 \leq x \leq 8$ و $x - y$ لنؤطر .

لدينا :

$$3 - 2 \leq x + (-y) \leq 8 + 4$$

إذن :

$1 \leq x - y \leq 12$ و منه فإن :

(4) - تأثير جداء عددين :

أعداد حقيقة موجبة بحيث :

$$\begin{aligned} & z \leq b \leq t \quad \text{و} \quad x \leq a \leq y \\ & x \times z \leq a \times b \leq y \times t \end{aligned}$$

* مثال 1 :

عدادان حقيقيان بحيث : $1 \leq y \leq 3$ و $3 \leq x \leq 7$.
 لنظر : $x \times y$

لدينا :

$$3 \times 1 \leq x \times y \leq 7 \times 3$$

إذن : $3 \leq x \times y \leq 21$

* مثال 2 :

عدادان حقيقيان بحيث : $3 \leq y \leq 6$ و $-5 \leq x \leq -2$.
 لنظر : $x \times y$

لدينا :

$$2 \leq -x \leq 5$$

إذن :

$$6 \leq -xy \leq 30 \quad \text{أي} \quad 2 \times 3 \leq (-x) \times y \leq 5 \times 6$$

. و منه فإن : $-30 \leq xy \leq -6$

(5) - تأثير مقلوب عدد حقيقي غير منعدم :

أعداد حقيقة غير منعدمة بحيث :

$$\frac{1}{y} \leq \frac{1}{a} \leq \frac{1}{x}$$

 سيكون لدينا :

(6) - تأثير خارج عددين :

أعداد حقيقة بحيث : $t \neq 0$ و $z \neq 0$ و $b \neq 0$ و $y \neq 0$ و $x \neq 0$.
 $z \leq b \leq t$ و $x \leq a \leq y$.

$$\frac{x}{t} \leq \frac{a}{b} \leq \frac{y}{z}$$

 سيكون لدينا

* ملاحظة هامة : لتأثير $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$ ، نضع :

* مثال :

$5 \leq y \leq 9$ و $x \leq 7 \leq 3$ عددان حقيقيان بحيث :

$$\frac{x}{y} \text{ لنؤطر}$$

: لدينا

$$\frac{1}{9} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{5}$$

: إذن

$$\frac{3}{9} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{7}{5} \quad \text{أي} \quad 3 \times \frac{1}{9} \leq x \times \frac{1}{y} \leq 7 \times \frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{3} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{7}{5} \quad \text{و بالتالي فإن :}$$

* تمرین تطبيقي :

a و b و c أعداد حقيقة بحيث :

$$-3 \leq c \leq 5 \quad -4 \leq b \leq -2 \quad 6 \leq a \leq 8$$

أطر : $\frac{a+b}{b^2}$ و $a+2b-4c$ و b^2 و a^2

: الحل

. 1 - تأطير a^2

$$36 \leq a^2 \leq 64 \quad \text{و منه فإن :} \quad 6^2 \leq a^2 \leq 8^2 \quad \text{لدينا :}$$

. 2 - تأطير b^2

$$4 \leq b^2 \leq 16 \quad \text{و منه فإن :} \quad (-2)^2 \leq b^2 \leq (-4)^2 \quad \text{لدينا :}$$

. 3 - تأطير $a+2b-4c$

$$-8 \leq 2b \leq -4 \quad \text{لدينا :}$$

$$12 \leq -4c \leq 20 \quad \text{أي} \quad -4 \times (-3) \leq -4c \leq -4 \times 5 \quad \text{و}$$

$$6 + (-8) + 12 \leq a + 2b - 4c \leq 8 + (-4) + 20 \quad \text{إذن :}$$

$$10 \leq a + 2b - 4c \leq 24 \quad \text{و منه فإن :}$$

. 4 - تأطير $\frac{a+b}{b^2}$

$$2 \leq a + b \leq 6 \quad \text{أي} \quad 6 + (-4) \leq a + b \leq 8 + (-2) \quad \text{لدينا :}$$

$$\frac{1}{16} \leq \frac{1}{b^2} \leq \frac{1}{4} \quad \text{و}$$

$$\frac{2}{16} \leq \frac{a+b}{b^2} \leq \frac{6}{4} \quad \text{أي} \quad 2 \times \frac{1}{16} \leq (a+b) \times \frac{1}{b^2} \leq 6 \times \frac{1}{4} \quad \text{إذن :}$$

$$\frac{1}{8} \leq \frac{a+b}{b^2} \leq \frac{3}{2} \quad \text{و بالتالي فإن :}$$