معادلة مستقيم

الكفاءات المستهدفة:

- التعرف على معادلة مستقيم.
- كتابة معادلة مستقيم معرف بنقطة ومنحى أو بنقطتين.
- تعيين شعاع التوجيه لمستقيم.
- رسم مستقيم معرف بمعادلة.
- التعرف على توازي مستقيمين.
- حساب معامل توجيه مستقيم لا يوازي حامل محور التراتيب.

تصميم الدرس

I. تمهيد
II. الدرس النظري حول معادلة مستقيم
III. التمارين والمشكلات
IV. حلول التمارين والمشكلات

• تمهيد :

في كل ما يلي : المستوي منسوب إلى معلم $\left(0,\vec{i},\vec{j}\right)$

بعدما عرّفنا التمثيل البياني لدالة, استعملنا " **مصطلح** " يعبّر به على " **فكرة رياضياتية معينة** "

مثالان:

التمثيل البياني للدالة f المعرفة على R , بالدستور $f(x)=2x+1$ هي مجموعة النقط التي إحداثياها $(x,f(x))$ حيث x عدد حقيقي وهذه المجموعة هي مستقيم (d) وقلنا :

" $y=2x+1$ **هي معادلة للمستقيم** (d) " للتعبير على : " $y=2x+1$ **هي علاقة تساوي تحققها الإحداثيات** (x,y) **لجميع نقط المستقيم** (d) **ولهذه النقط فقط** ".

و(مثلا) إذا أعطيت نقطة, بإحداثييها, يمكننا أن نتأكد إن كانت هذه النقطة تنتمي إلى المستقيم (d) فمثلا: النقطة A حيث $A(1,3)$ تنتمي إلى المستقيم (d) لأن لو عوضنا (x,y) بـ $(1,3)$, $y=2x+1$ تصبح $3=3$ وهذا صحيح بينما النقطة B حيث $B(2,7)$ لا تنتمي إلى المستقيم (d) لأن لو عوضنا (x,y) بـ $(2,7)$, $y=2x+1$ تصبح $7=5$ وهذا غير صحيح.

التمثيل البياني للدالة g المعرفة, على R , بالدستور $g(x)=\dfrac{1}{x}$ هو مجموعة النقط التي إحداثياها $(x,g(x))$ حيث x عدد حقيقي غير معدوم وهذه المجموعة هي قطع زائد (C) وقلنا "

$g(x)=\dfrac{1}{x}$ هي معادلة للقطع الزائد (C) " للتعبير على " $\dfrac{1}{x}$ هي علاقة تساوي تحققها الإحداثيات (x,y) لجميع نقط القطع الزائد (C) ولهذه النقط فقط ".

و(مثلا) يمكننا أن نعين, بالإحداثيات, نقطا من القطع الزائد (C) ولذلك يكفي أن نعطي قيما للفاصلة x ونحسب التراتيب y المرفقة بهذه القيم وفق الدستور: $y=\dfrac{1}{x}$ (شريطة أن لا يكون x معدوما!!)

المفهوم العام لمعادلة مجموعة نقط :

بصورة عامة: إذا كانت(C) مجموعة من نقط المستوي

نسمي " **معادلة للمجموعة (C)** " كل " **علاقة تساوي تحققها الإحداثيات** (x,y) **لجميع نقط (C) ولهذه النقط فقط** "

• الدرس النظري حول معادلة مستقيم :

مقدمة :

المستقيم هو نوع خاص (ومرجعي) من مجموعات نقط المستوي، وفي أغلبية ميادين العلوم تستعمل النتائج المتعلقة بالمستقيم.

في هذا الدرس نتناول المستقيم من جانب الهندسة **التحليلية المستوية** أي في المستوي المنسوب إلى معلم حيث كل نقطة معينة بإحداثييها وكل شعاع معين بمركبتيه.

أشعة توجيه مستقيم :

تعريف:

ليكن (d) مستقيما

نسمي شعاع توجيه للمستقيم (d) كل شعاع غير معدوم منحاه منحى المستقيم (d)

بعبارات أخرى:

ليكن (d) مستقيما وليكن $\vec{V}$ شعاعا غير معدوم بحيث:

$\vec{V} = \overrightarrow{AB}$ (أين A و B نقطتان متمايزتان)

يكون الشعاع $\vec{V}$ شعاع توجيه للمستقيم (d) إذا وفقط إذا كان المستقيم (AB) موازيا للمستقيم (d)

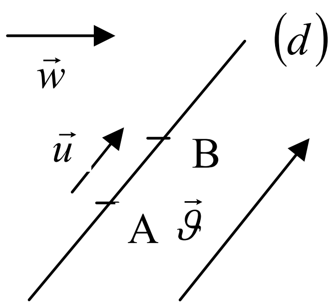
مثال:

في الشكل المجاور: $\vec{u}$ شعاع توجيه للمستقيم (d)

$\vec{\vartheta}$ كذلك شعاع توجيه للمستقيم (d)

$\vec{w}$ ليس شعاع توجيه للمستقيم (d)

$\overrightarrow{AB}$ هو كذلك شعاع توجيه للمستقيم (d)



استنتاجات :

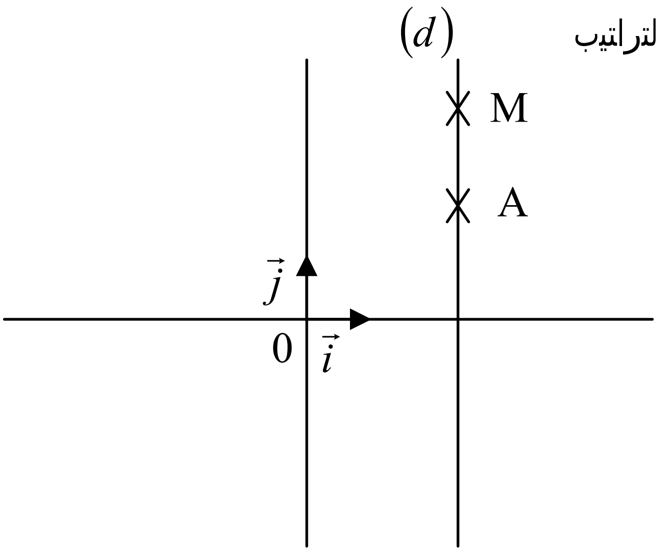
إذا كانت A و B نقطتين متمايزتين فإن الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هو شعاع توجيه للمستقيم (AB)
إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{\vartheta}$ شعاعي توجيه لنفس المستقيم (d) فإن الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{\vartheta}$ متوازيان.
إذا كان $\vec{u}$ شعاع توجيه لمستقيم (d) فإن كل شعاع من الشكل $k\vec{u}$, حيث k عدد حقيقي غير معدوم, هو كذلك شعاع توجيه للمستقيم (d) (لأن $\vec{u}$ و $k\vec{u}$ متوازيان ومنحى $\vec{u}$ هو منحى (d) وبالتالي منحى $k\vec{u}$ هو منحى (d))

- معادلة مستقيم :

* حسب النظرية حول التمثيل البياني لدالة تآلفية, كل مستقيم لا يوازي حامل محورالتراتيب هو التمثيل البياني لدالة تآلفية منه :

كل مستقيم لا يوازي حامل محور التراتيب له معادلة من الشكل: $y = ax + b$ حيث a و b عددان حقيقيان معلومان.....(1)

** لنكتب الآن معادلة لمستقيم يوازي حامل محور التراتيب



لتكن A نقطة معلومة حيث: $A(c,c')$

وليكن (d) المستقيم الذي يشمل A

ويوازي حامل محور التراتيب

مهما تكن النقطة $M(x,y)$

M تنتمي إلى (d) إذا وفقط

إذا كان $\overrightarrow{AM} // \vec{j}$

ولنا $\vec{j}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-c\\y-c'\end{pmatrix}$

و $\overrightarrow{AM} // \vec{j}$ يكافئ $(x-c).1-(y-c').0 = 0$ (شرط توازي شعاعين)

وهذا يكافئ : $x - c = 0$

أي $x = c$

منه : علاقة التساوي التي تحققها الإحداثيات (x,y) لجميع نقط (d) ولهذه النقط فقط هي: $x = c$

إذن: $x = c$ هي معادلة للمستقيم (d)

وبالتالي : كل مستقيم يوازي حامل محور التراتيب له معادلة من الشكل $x = c$ حيث c عدد حقيقي معلوم ....(2)

*** كل مستقيم لا يوازي حامل محور التراتيب له معادلة من الشكل $y = ax + b$ وهي من الشكل $ax - y + b = 0$ وهي من الشكل $ux + \vartheta y + w = 0$ (هنا $\vartheta = -1$ إذن $\vartheta \neq 0$)

مستقيم يوازي حامل محور التراتيب له معادلة من الشكل $x = c$ وهي من الشكل $1.x + 0.y - c = 0$ وهي كذلك من الشكل: $ux + \vartheta y + w = 0$ (هنا $u = 1$ منه $u \neq 0$)

إذن: لكل مستقيم معادلة من الشكل: $ux + \vartheta y + w = 0$ حيث w, ϑ, u أعداد حقيقية معلومة بحيث: $u \neq 0$ أو $\vartheta \neq 0$

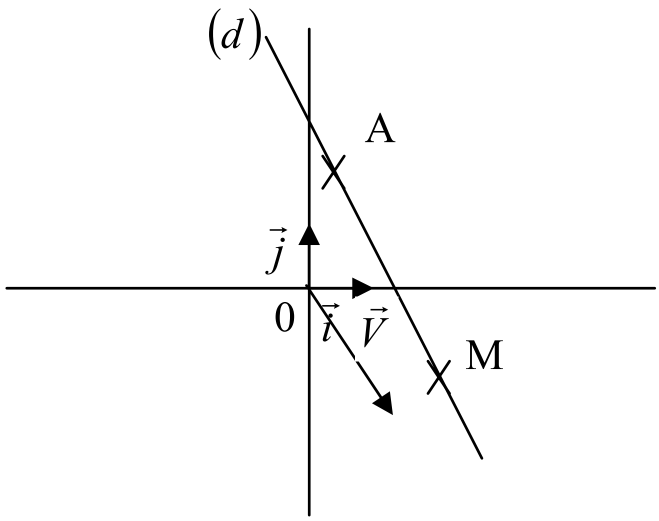
وهكذا لقد برهنا على

النظرية:

لكل مستقيم معادلة من الشكل: $ux + \vartheta y + w = 0$ حيث w, ϑ, u أعداد حقيقية معلومة بحيث: $u \neq 0$ أو $\vartheta \neq 0$ (أي u و ϑ غير

كتابة معادلة لمستقيم معّرف بنقطة ومنحى أو بنقطتين (على ضوء مثالين) :

المستقيم معّرف بنقطة ومنحى :



لتكن A النقطة حيث : $A\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

وليكن $\vec{V}$ الشعاع حيث : $\vec{V}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$

لنكتب معادلة للمستقيم (d)

الذي يشمل A ومنحاه منحى $\vec{V}$

مهما تكن النقطة $M(x, y)$,

M تنتمي إلى (d) إذا وفقط إذا $\overrightarrow{AM} // \vec{V}$

ولنا $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x - \frac{1}{2}\\ y - \frac{3}{2}\end{pmatrix}$ $\vec{V}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$

و $\overrightarrow{AM} // \vec{V}$ يكافئ $1.\left(y-\frac{3}{2}\right)-(-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)=0$ (شرط توازي شعاعين)

وهذا يكافئ $y-\frac{3}{2}+2x-2.\frac{1}{2}=0$ أي $2x+y-\frac{5}{2}=0$...(1)

ولتبسيط الكتابة نضرب (1) في 2 تصبح $4x+2y-5=0$

منه : $4x+2y-5=0$ هي معادلة للمستقيم (d) وللتعبير على هذه النتيجة الأخيرة نكتب كذلك: $(d): 4x+2y-5=0$

المستقيم معّرف بنقطتين متمايزتين:

لتكن B و C النقطتين بحيث : $B\left(-\frac{1}{2},1\right)$ و $C(2,-1)$

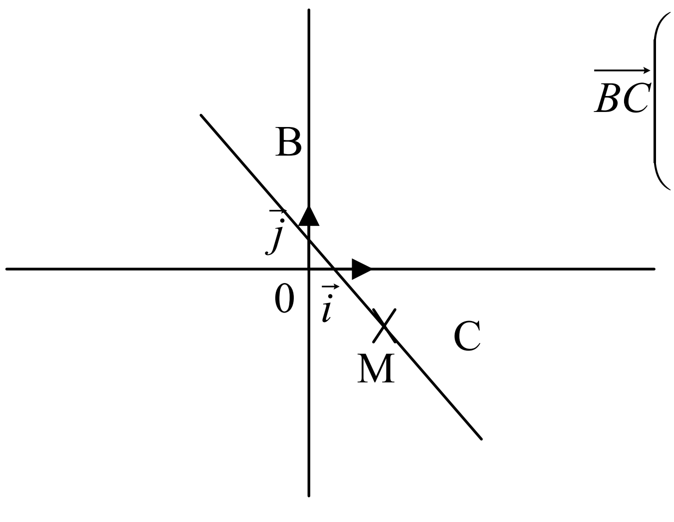
لنكتب معادلة للمستقيم (BC)

مهما تكن النقطة $M(x,y)$,

M تنتمي إلى (BC) إذا وفقط إذا كان: $\overrightarrow{BM} // \overrightarrow{BC}$

ولنا $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} x-\left(-\frac{1}{2}\right) \\ y-1 \end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 2-\left(-\frac{1}{2}\right) \\ -1-1 \end{pmatrix}$

أي $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} x+\frac{1}{2} \\ y-1 \end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ -2 \end{pmatrix}$



منه M تنتمي إلى (BC) إذا وفقط إذا كان :

$$\frac{5}{2}(y-1)-(-2)\left(x+\frac{1}{2}\right)=0$$

أي $\frac{5}{2}y-\frac{5}{2}+2x+1=0$ أي $2x+\frac{5}{2}y-\frac{3}{2}=0$ أي $4x+5y-3=0$

منه : $(BC): 4x+5y-3=0$

المعادلات من الشكل : $ux+\vartheta y+w=0$ حيث w,ϑ,u أعداد حقيقية معلومة بحيث : $u\neq 0$ أو $\vartheta\neq 0$:

لقد رأينا أن كل مستقيم له معادلة من الشكل $ux+\vartheta y+w=0$ حيث w,ϑ,u أعداد حقيقية معلومة بحيث: $u\neq 0$ أو $\vartheta\neq 0$

نتطرق الآن إلى المسألة العكسية.

لتكن المعادلة $ux+\vartheta y+w=0$ حيث w,ϑ,u أعداد حقيقية معلومة بحيث : $u\neq 0$ أو $\vartheta\neq 0$ هل هذه المعادلة هي معادلة مستقيم ؟

نستدل بفصل الحالات: لنا إما $u=0$ وإما $\vartheta=0$

الحالة الأولى لما $\vartheta\neq 0$: ϑ له مقلوب وبضرب طرفي المعادلة في $\dfrac{1}{\vartheta}$ هي تصبح :

$\dfrac{u}{\vartheta}x+y+\dfrac{w}{\vartheta}=0$ أي $y=\left(-\dfrac{u}{\vartheta}\right)x+\left(-\dfrac{w}{\vartheta}\right)$ وهي من الشكل $y=ax+b$

وهي معادلة التمثيل البياني لدالة تآلفية, وحسب النظرية, هي معادلة مستقيم (d) في المعادلة $y=-\dfrac{u}{\vartheta}x-\dfrac{w}{\vartheta}$ لما $x=0$, $y=-\dfrac{w}{\vartheta}$ لما $x=1$, $y=-\dfrac{u}{\vartheta}-\dfrac{w}{\vartheta}$.

منه : النقطتان A و B حيث $A\left(0,-\dfrac{w}{\vartheta}\right)$ و $B\left(1,-\dfrac{u}{\vartheta}-\dfrac{w}{\vartheta}\right)$ تنتميان إلى المستقيم (d).

و $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-\dfrac{u}{\vartheta}\end{pmatrix}$ و $(-\vartheta)\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-\vartheta\\u\end{pmatrix}$ هما شعاعا توجيه للمستقيم (d).

الخلاصة: لما $\vartheta\neq 0$, المعادلة المقترحة هي معادلة مستقيم وشعاع توجيه لهذا المستقيم هو الشعاع $\vec{V}$ حيث $\vec{V}\begin{pmatrix}-\vartheta\\u\end{pmatrix}$

الحالة الثانية لما $\vartheta=0$ **:**

لنا $u\neq 0$ لأن $u\neq 0$ أو $\vartheta\neq 0$ يعني u و ϑ غير معدومين معا

والمعادلة تصبح $ux+w=0$ أي $x=-\dfrac{w}{u}$ وهي معادلة مستقيم يوازي حامل محور التراتيب

و $\vec{j}$ هو شعاع توجيه لهذا المستقيم وكذلك الشعاع $u\vec{j}$ ولنا $\vec{j}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

منه $\vec{uj}\begin{pmatrix}0\\u\end{pmatrix}$ وبما أن $\vartheta = 0$ فإن $\vec{uj}\begin{pmatrix}-\vartheta\\u\end{pmatrix}$

الخلاصة: لما $\vartheta = 0$ المعادلة المقترحة هي معادلة مستقيم وشعاع توجيه لهذا المستقيم هو الشعاع $\vec{V}$ حيث $\vec{V}\begin{pmatrix}-\vartheta\\u\end{pmatrix}$

النظرية:

كل معادلة من الشكل : $ux + \vartheta y + w = 0$ حيث w, ϑ, u أعداد حقيقية معلومة بحيث : $u \neq 0$ أو $\vartheta \neq 0$ هي معادلة مستقيم و الشعاع $\vec{V}$ حيث $\vec{V}\begin{pmatrix}-\vartheta\\u\end{pmatrix}$ هو شعاع توجيه لهذا المستقيم

الشعاع $-2\vec{i} + 3\vec{j}$ هو شعاع توجيه لهذا المستقيم.

حالات خاصة هامة, تذكير لتعريف :

المعادلة $y = ax + b$ حيث a و b عددان حقيقيان هي معادلة مستقيم (d) لا يوازي حامل محور التراتيب وهذه المعادلة تكتب كذلك $ax - 1.y + b = 0$ منه الشعاع $\vec{V}$ حيث $\vec{V}\begin{pmatrix}-(-1)\\a\end{pmatrix}$ هو شعاع توجيه للمستقيم (d)

المعادلة $x = c$ حيث c عدد حقيقي معلوم هي معادلة مستقيم يوازي حامل محور التراتيب ويشمل جميع النقط التي فاصلتها c

منه $x = 0$ هي معادلة لحامل محور التراتيب

المعادلة $y = c$ حيث c عدد حقيقي معلوم تكتب $0x - 1y + c = 0$ منه هي معادلة مستقيم والشعاع $\vec{i}\begin{pmatrix}-(-1)\\0\end{pmatrix}$ أي $\vec{i}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ هو شعاع توجيه لهذا المستقيم.

منه $y = c$ حيث c عدد حقيقي معلوم هي معادلة مستقيم يوازي حامل محور الفواصل ويشمل جميع النقط التي ترتيبها c

منه $y = 0$ هي معادلة لحامل محور الفواصل

وعليه النتائج الهامة التالية :

نظرية وتعريف:

المعادلة $x = c$ حيث c عدد حقيقي معلوم هي معادلة مستقيم يوازي حامل محور التراتيب ويشمل جميع النقط التي فاصلتها c.

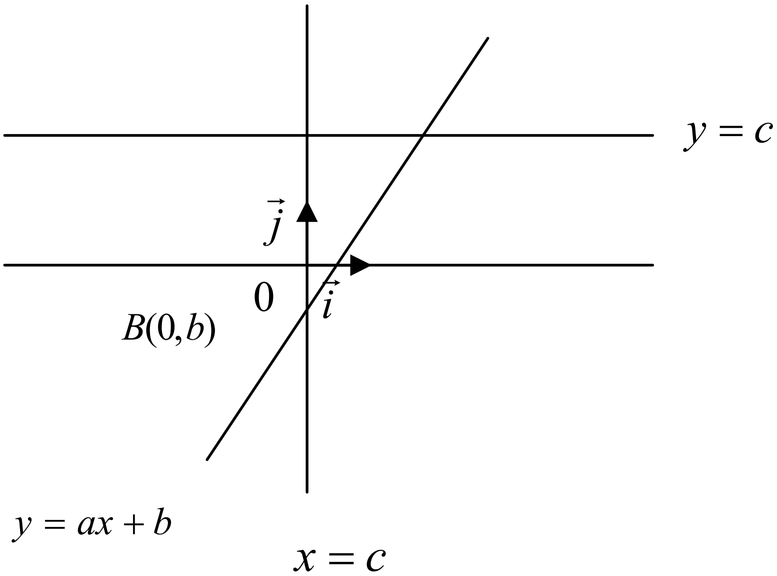
المعادلة $y = c$ حيث c عدد حقيقي معلوم هي معادلة مستقيم يوازي حامل محور الفواصل ويشمل جميع النقط التي ترتيبها c.

3) $x = 0$ هي معادلة لحامل محور التراتيب, $y = 0$ هي معادلة لحامل محور الفواصل.

4) المعادلة $y = ax + b$ حيث a و b عددان حقيقيان معلومان هي معادلة مستقيم (d) لا يوازي حامل محور التراتيب.

و: العدد الحقيقي a يسمى معامل التوجيه المستقيم (d)

العدد الحقيقي b يسمى الترتيب في المبدء للمستقيم (d) لأن (d) يقطع حامل محور التراتيب في النقطة $B(0,b)$



رسم مستقيم معّرف بمعادلة (على ضوء أمثلة) :

لنرسم كلا من المستقيمات $(D_1),(D_2),(D_3)$ حيث :

(D_1) معرف بالمعادلة $x=3$, (D_2) معرف بالمعادلة $y=5$, (D_3) معرف بالمعادلة $2x+3y-7=0$ وهذا بالنسبة إلى نفس المعلم $(0,\vec{i},\vec{j})$

لرسم مستقيم يكفي أن نعين نقطتين متمايزتين منه :

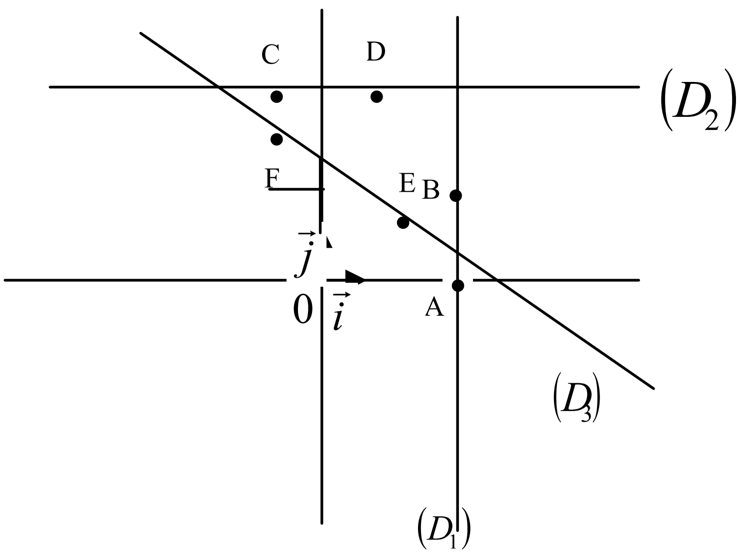
(D_1) هو مجموعة جميع النقط التي فاصلتها 3 وهو يشمل, مثلا, النقطتين A و B حيث $A(3,0)$ و $B(3,1)$

** (D_2) هو مجموعة جميع النقط التي ترتيبها 5 وهو يشمل, مثلا, النقطتين C و D حيث $C(-1,5)$ و $D(1,5)$

*** لرسم (D_3) من الأفضل أن نقدم معادلة "مختصرة" له بالفعل $2x+3y-7=0$ تكافئ $3y=-2x+7$ أي $y=\dfrac{-2x+7}{3}$ و $y=\dfrac{-2x+7}{3}$ هي كذلك معادلة للمستقيم (D_3) وللحصول على نقطتين من D نعطي قيمتين لـ x ونستنتج y (من الأفضل أن تؤخذ قيم تسهل الرسم)

لما $y=1, x=2$ ولما $y=3, x=-1$ منه (D_3) يشمل النقطتين E و F حيث $E(2,1)$ و $F(-1,3)$

منه الشكل :



التعرف على توازي مستقيمين:

الحالة العامة :

النظرية :

لتكن $u, \vartheta, w, u', \vartheta', w'$ أعداد حقيقية بحيث u و ϑ غير معدومين معا و u' و ϑ' غير معدومين معا وليكن (D) المستقيم ذو المعادلة $ux + \vartheta y + w = 0$ و (D') المستقيم ذو المعادلة $u'x + \vartheta' y + w' = 0$
حتى يكون (D) و (D') متوازيين يلزم ويكفي أن يكون $u\vartheta' - \vartheta u' = 0$

البرهان :

الشعاع $\vec{V}$ حيث $\vec{V}\begin{pmatrix} -\vartheta \\ u \end{pmatrix}$ هو شعاع توجيه للمستقيم (D)

والشعاع $\vec{V}'$ حيث $\vec{V}'\begin{pmatrix} -\vartheta' \\ u' \end{pmatrix}$ هو شعاع توجيه للمستقيم (D')

وتوازي (D) و (D') يعني توازي $\vec{V}$ و $\vec{V}'$ وهذا يعني

$(-\vartheta)u' - u(-\vartheta') = 0$ وهذا يعني $u\vartheta' - \vartheta u' = 0$

مثلا: ليكن (D_1) المستقيم ذو المعادلة: $3x + 2y - 7 = 0$

وليكن (D_2) المستقيم ذو المعادلة: $6x + 4y + 1 = 0$

وليكن (D_3) المستقيم ذو المعادلة: $6x + 5y - 7 = 0$

لدينا: $3.4 - 2.6 = 0$ منه $(D_2) // (D_1)$

ولدينا: $3.5 - 2.6 = 3$ ومنه $3.5 - 2.6 \neq 0$ وعليه (D_1) لا يوازي (D_2)

حالة مستقيمين لا يوازيان حامل محور التراتيب:

ليكن (D) و (D') مستقيمين كل منها لا يوازيان حامل محور التراتيب

ولتكن $y = ax + b$ معادلة للمستقيم (D) ولتكن $y = a'x + b'$ معادلة للمستقيم (D')

$ax - y + b = 0$ هي كذلك معادلة للمستقيم (D)

$a'x - y + b' = 0$ هي كذلك معادلة للمستقيم (D')

وحتى يكون $(D) // (D')$ يلزم ويكفي أن يكون $a(-1) - (-1)a' = 0$

أي أن يكون $-a+a'=0$ أي أن يكون $a=a'$

وهكذا لقد برهنا على

النظرية:

حتى يتوازا مستقيمان- كل منهما لا يوازي حامل محور التراتيب- يلزم ويكفي أن يكون لهما نفس معامل التوجيه

تمرين:

ليكن (ℓ) المستقيم ذو المعادلة $y=3x+5$ ولتكن A النقطة حيث $A(-1,\frac{1}{2})$

أكتب معادلة للمستقيم (Δ) الذي يشمل A ويوازي (ℓ)

الحل :

بما أن (Δ) يوازي (ℓ) ومعامل توجيه (ℓ) هو 3 فإن معامل توجيه (Δ) هو 3 منه للمستقيم (Δ) معادلة من الشكل $y=3x+b$ ولتكن A تنتمي إلى (Δ) منه إحداثيا A تحققان كل معادلة للمستقيم (Δ) وبالتالي $\frac{1}{2}=3(-1)+b$

وعليه : $b=\frac{1}{2}+3$ إذن : $b=\frac{7}{2}$

منه $(\Delta): y=3x+\frac{7}{2}$

تعيين معامل توجيه مستقيم لا يوازي حامل محور التراتيب :

المستقيم معرف بمعادلة :

مثال: ليكن (d) المستقيم ذو المعادلة $3x+7y-5=0$

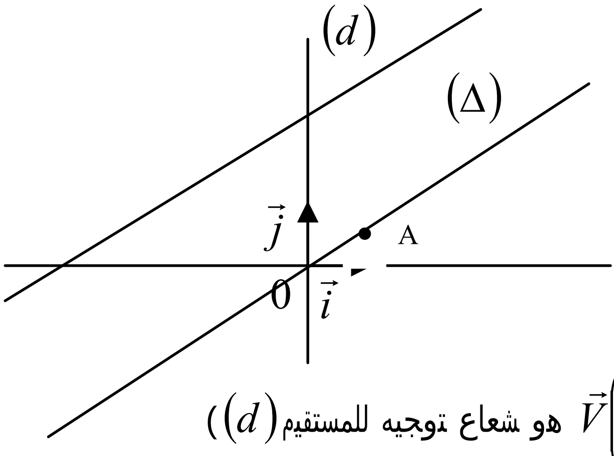
$7y=-3x+5$ و $y=-\frac{3}{7}x+\frac{5}{7}$ هما كذلك معادلتان للمستقيم (d) ومن خلال المعادلة الأخيرة نستنتج أن **معامل توجيه المستقيم** (d) هو $-\frac{3}{7}$

إذا أعطيت معادلة $(م)$ لمستقيم (d) لا يوازي حامل محور التراتيب لتعيين معامل توجيه المستقيم (d) , نكتب المعادلة من الشكل $y=ax+b$ التي تكافئ $(م)$ فيكون a هو معامل توجيه المستقيم (d)

منحى المستقيم معين بشعاع توجيه له:

ليكن (d) مستقيما وليكن a عددا حقيقيا,

a هو معامل توجيه (d) يعني أن (d) يوازي المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = ax$ (لهما نفس معامل التوجيه)



والمستقيم (Δ) يشمل 0 (مبدأ المعلم)

وكذلك النقطة A حيث $A(1,a)$ و $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix}$

(d) يوازي (Δ) يعني أن

$\overrightarrow{OA}$ شعاع توجيه للمستقيم (d)

إذن:(a هو معامل توجيه (d)) يكافئ (الشعاع $\vec{V}\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix}$ هو شعاع توجيه للمستقيم (d))

هكذا لقد برهنا على

النظرية:

ليكن (d) مستقيما وليكن a عددا حقيقيا. حتى يكون a معامل توجيه المستقيم (d) يلزم ويكفي أن يكون الشعاع $\vec{V}\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix}$ شعاع توجيه للمستقيم (d)

معامل توجيه مستقيم هو المركبة الثانية لشعاع التوجيه –لهذا المستقيم- الذي مركبته الأولى تساوي 1.

تمرين:

عين معامل توجيه مستقيم (d) منحاه منحى الشعاع $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$

الحل :

نعلم أنه إذا كان $\vec{u}$ شعاع توجيه لمستقيم (d) فإن كل شعاع من الشكل $k\vec{u}$ حيث k عدد حقيقي غير معدوم هو كذلك شعاع توجيه للمستقيم (d) وللحصول على مركبة أولى تساوي 1 يلزم ويكفي أن نضرب 3 في $\frac{1}{3}$

وهكذا الشعاع $\frac{1}{3}\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}.3\\\frac{1}{3}.5\end{pmatrix}$ هو شعاع توجيه للمستقيم (d)

ولنا $\frac{1}{3}\vec{u}\begin{pmatrix}1\\\frac{5}{3}\end{pmatrix}$ منه وحسب النظرية السابقة

وعليه: **معامل توجيه كل مستقيم منحاه منحى** $\vec{u}$ هو $\frac{5}{3}$

جـ. المستقيم معين بنقطتين :

لتكن A و B نقطتين بحيث $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ حيث $x_B \neq x_A$

لنا $A \neq B$ و $\overrightarrow{AB}$ معامل توجيه للمستقيم (AB) ولنا $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B - x_A\\y_B - y_A\end{pmatrix}$

و(للحصول على مركبة أولى تساوي 1 نضرب $x_B - x_A$ في مقلوبه) الشعاع

$\overrightarrow{AB}.\frac{1}{x_B - a_A}\begin{pmatrix}\frac{x_B - x_A}{x_B - x_A}\\\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}\end{pmatrix}$ هو كذلك شعاع توجيه للمستقيم (AB)

ولدينا $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \end{pmatrix}$ $\dfrac{1}{x_B - x_A}$ إذن معامل توجيه (AB) هو $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

هكذا لقد برهنا على

النظرية:

إذا كانت A و B نقطتين بحيث $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ مع $x_B \neq x_A$ فإن معامل توجيه المستقيم (AB) هو $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

مثال :

لتكن A و B النقطتين بحيث $A(1,5)$ و $B(-7,12)$

معامل توجيه المستقيم (AB) هو $\dfrac{12-5}{(-7)-(1)}$

منه معامل توجيه المستقيم (AB) هو $-\dfrac{7}{8}$

• تمارين ومشكلات:

في جميع هذه التمارين إحداثيات النقط والمركبات السلمية للأشعة ومعادلات المستقيمات تكون بالنسبة إلى معلم $\left(0,\vec{i},\vec{j}\right)$

ت1: عين العدد الحقيقي m حتى تنتمي النقطة A إلى المستقيم $\left(d\right)$ في كل حالة من الحالات التالية:

1) $\left(d\right): y = 3x - 5$ و $A(a,-2a)$,2) $\left(d\right): ax + y - 1 = 0$ و $A\left(2,a\right)$, 3) $\left(d\right): y = ax + 2a$ و $A\left(a,-1\right)$

ت2: أكتب معادلة للمستقيم $\left(AB\right)$ في كل حالة من الحالات التالية:

1) $A(-1,5)$ و $B(-2,3)$,2) $A(\frac{1}{2},-\frac{1}{3})$ و $B(\frac{1}{4},-1)$,3) $A(0,1)$ و $B(3,1)$, 4) $A(-\frac{1}{5},2)$ و $B(-\frac{1}{5},0)$

ت3: أكتب معادلة للمستقيم $\left(d\right)$ الذي يشمل A و $\vec{V}$ شعاع توجيه له في كل حالة من الحالات :

1) $A(1,2)$ و $\vec{V}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$, 2) $A(0,5)$ و $\vec{V}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, 3) $A\left(-\frac{1}{2},2\right)$ و $\vec{V} = \vec{i} + \vec{j}$, 4) $A(\sqrt{2},3)$ و $\vec{V}\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$

ت4 : عين (بمركبتيه السلميتين) شعاع توجيه للمستقيم $\left(d\right)$ في كل حالة من الحالات:

1) $\left(d\right): 3x + y - 5 = 0$, 2) $\left(d\right): y = 3x + 5$, 3) $\left(d\right): x = -y + 1$, 4) $\left(d\right): x = 7$, 5) $\left(d\right): y = -8$

ت5 : قل عن المستقيمين $\left(d\right)$ و $\left(d'\right)$ أن هما متوازيان في كل حالة من الحالات التالية:

1) $\left(d\right): y = \frac{1}{3}x + 1$ و $\left(d'\right): 9y - 3x + 2 = 0$, 2) $\left(d\right): y = -5x + 8$ و $\left(d'\right): y = 5x - 8$, 3) $\left(d\right): x - 7y + 5 = 0$ والشعاع $\vec{V}\begin{pmatrix}14\\2\end{pmatrix}$ هو شعاع توجيه للمستقيم $\left(d'\right)$, 4) $\left(d\right): y = 5x - 2$ ومعامل توجيه $\left(d'\right)$ هو 5-

ت6 : أكتب معادلة للمستقيم $\left(\Delta\right)$ الذي يشمل A ويوازي المستقيم $\left(d\right)$ في كل حالة من الحالات:

1) $(d): 3x+5y-1=0$ و $A(-1,8)$,2) $(d): y=-2x+1$ و $A(3,0)$,
3) $(d): x=2$ و $A(-14,10)$

ت7: عين معامل توجيه المستقيم (d) في كل حالة من الحالات التالية:

1) $(d)=(AB)$ حيث $A(1,1)$ و $B(5,2)$, 2) $(d): 3x+7y=1$, 3)

الشعاع $\vec{V}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\ -\sqrt{3}\end{pmatrix}$ هو شعاع توجيه للمستقيم (d), المستقيم (d) يوازي المستقيم (Δ)

حيث $(\Delta): 3x+8y=5$

ت8: أنشئ المستقيم (d) (أشكال مختلفة) في كل حالة من الحالات التالية:

1) $(d): x+y=5$, 2) $(d): 3x=2y+1$, 3) $(d): 5x+y=0$, 4) $(d): x=3$
5,) $(d): y=-2$

ت9: ليكن (d) و (d') المستقيمين حيث: $(d): y=2x+4$ و $(d'): y=-3x-1$

- أثبت أن (d) و (d') ليسا متوازيين
- عين إحداثيي نقطة تقاطع (d) و (d')
- أنشئ (d) و (d') (نفس الشكل)

ت10: لتكن E مجموعة النقط $M(x,y)$ حيث: $y^2=x^2$

- هل E مستقيم؟
- عين (بإحداثياتها) أربعة نقط تنتمي إلى المجموعة E
- تعرف على الطبيعة الهندسية للمجموعة (E) ثم أنشئها

• حلول التمارين والمشكلات:

ت1: A تنتمي إلى المستقيم (d) يعني أن إحداثيي A تحقق معادلة (d) المعطاة :

في هذه الحالة: $a=1$

في هذه الحالة: $a=\frac{1}{3}$

في هذه الحالة: $a=-1$

ت2: المطلوب معادلة للمستقيم (AB) في كل من الحالات المعطاة :

لدينا $A(-1,5)$ و $B(-2,3)$

لتكن M نقطة معتبرة من المستقيم (AB) حيث $M(x,y)$, عندئذ: $M\in(AB)$ تكافئ $\overrightarrow{AM}\,//\,\overrightarrow{AB}$

ولكن: $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+1\\y-5\end{pmatrix}$

وعليه: $M\in(AB)$ تكافئ $(x+1)(-2)-(y-5)(-1)=0$

تكافئ $-2x-2+y-5=0$

تكافئ $-2x+y-7=0$

ومنه $-2x+y-7=0$ معادلة للمستقيم (AB)

بنفس الكيفية يتم التعامل مع الحالات الأخرى

ت3: المطلوب معادلة للمستقيم (d) الذي يشمل A و $\vec{V}$ شعاع توجيه له :

1)لدينا $A(1,2)$ و $\vec{V}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

لكن M نقطة معتبرة من (d) حيث $M(x,y)$, عندئذ: $M\in(d)$ تكافئ $\overrightarrow{AM}\,//\,\vec{V}$

ولكن $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-1\\y-2\end{pmatrix}$

وعليه: $M\in(d)$ تكافئ $(-1)(y-2)-1(x-1)=0$

تكافئ : $-y+2-x+1=0$

تكافئ : $x+y-3=0$

ومنه: $x+y-3$ معادلة للمستقيم (d)

بنفس الكيفية يكون التعامل مع الحالات الأخرى.

ت4: نرمز بـ $\vec{V}$ شعاع توجيه للمستقيم (d) المطلوب:

1) $\vec{V}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ ، 2) $\vec{V}\begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}$ ، 3) $\vec{V}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ ، 4) $\vec{V}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ ، 5) $\vec{V}\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$

ت5: 1) في هذه الحالة (d) و (d') متوازيان

2) في هذه الحالة (d) و (d') غير متوازيين

3) في هذه الحالة (d) و (d') متوازيان

4) في هذه الحالة (d) و (d') غير متوازيين

ت6: في التمرين يمكن الاستفادة من التمرين الثاني وكذا التمرين الثالث

ت7: المطلوب تعيين معامل توجيه المستقيم (AB)

1)لدينا: $(d)=(AB)$ حيث $A(1,1)$ و $B(5,2)$

معامل التوجيه يساوي $\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$

و $\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\dfrac{1}{4}$

2) لدينا: $(d): 3x+7y=1$

معامل توجيه (d) يساوي $-\dfrac{3}{7}$

3) $\vec{V}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\-\sqrt{3}\end{pmatrix}$ هو شعاع توجيه للمستقيم (d)

معامل توجيه (d) يساوي $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

4) لدينا (d) يوازي المستقيم (Δ) حيث $(\Delta): 3x+8y=5$

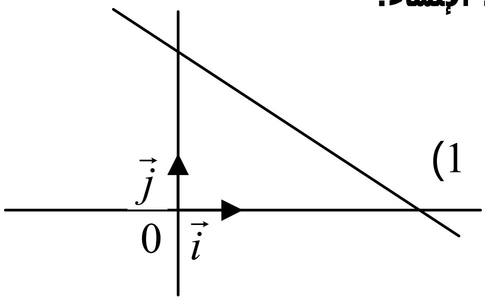
بما أن $(\Delta)//(d)$ فإن للمستقيمين نفس معامل التوجيه

وبما أن معامل توجيه (Δ) يساوي $-\dfrac{3}{8}$

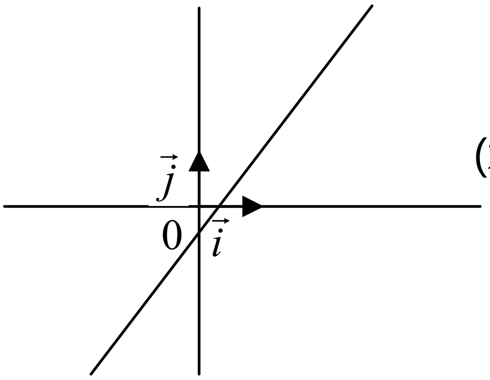
فإن معامل توجيه (d) يساوي $-\frac{3}{8}$

ت8 : الإنشاء:

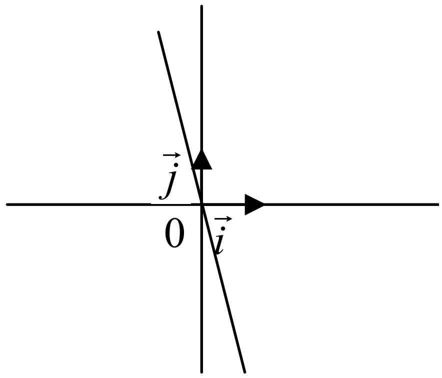
1)



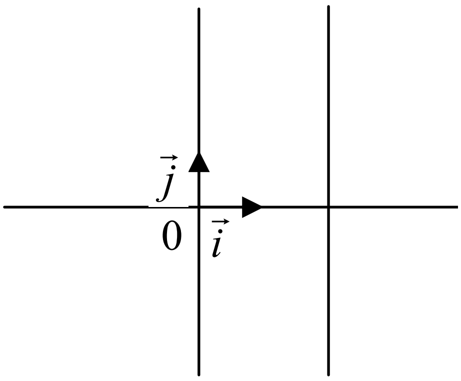
2)



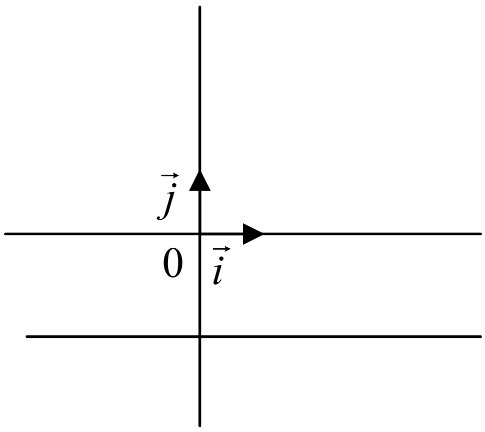
3)



4)



5)



ت9 : لدينا : $(d): y = 2x + 4$ و $(d'): y = -3x - 1$

1) (d) و (d') ليسا متوازيين لأن معامل توجيه (d) لا يساوي معامل توجيه (d')

2) لتكن M نقطة تقاطع (d) و (d') حيث $M(x, y)$ عندئذ :

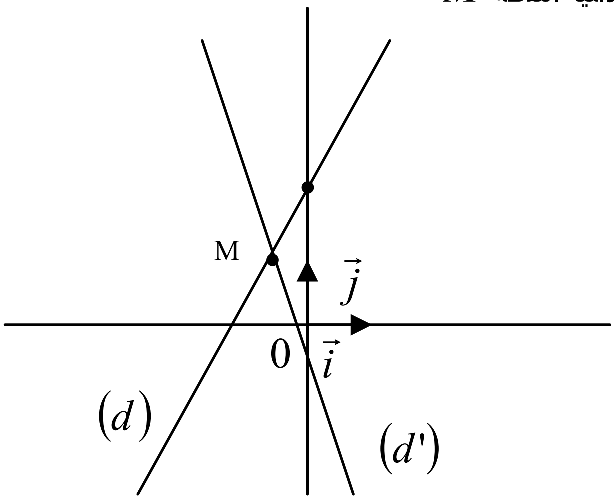
لتعيين إحداثيي النقطة M يلزم ويكفي حل الجملة التالية :

$$\begin{cases} \beta = 2\alpha + 4 \\ \beta = -3\alpha - 1 \end{cases}$$

فنجد : $\begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 2 \end{cases}$

ومنه $(-1,2)$ هما إحداثيا النقطة M

3) الرسم



ت10: لتكن E مجموعة النقط $M(x,y)$ حيث: $y^2 = x^2$

E ليس مستقيما

بالملاحظة يمكننا أن نجد بأن النقط: D, C, B, A كل منها تنتمي إلى المجموعة E حيث :

$D(-1,1), C(-1,-1), B(1,-1), A(1,1)$

لدينا :

$y^2 = x^2$ تكافئ $y^2 - x^2 = 0$

تكافئ $(y-x)(y+x) = 0$

تكافئ $y + x = 0$ أو $y - x = 0$

ومنه E هي اتحاد مستقيمين أحدهما (d) والآخر (d')

حيث : $(d): x + y = 0$ و $(d'): x - y = 0$